

mehratomige Gasmoleküle wie H_2 , N_2 , CO und CO_2 beeinflussen die Energie der freien Elektronen und damit die EAW in ähnlicher Weise wie H_2O -Dampf oder O_2 , wie orientierende Versuche gezeigt haben.

Infolge der beiden Anlagerungsmechanismen müssen im Gasraum zunächst auch zwei Ionengruppen mit unterschiedlicher Beweglichkeit entstehen. Selbst wenn man, wie bei unserer Apparatur, aus den Oszillogrammen nur eine mittlere Beweglichkeit ermitteln kann, wäre zu erwarten gewesen, daß diese sich aus den oben erwähnten Gründen mit der Feldstärke ändert. Die Beweglichkeit ist aber nach den Ver-

suchen unabhängig von der Feldstärke. Das läßt sich folgendermaßen erklären: Die durch Dissoziation oder Elektronenanlagerung anfänglich entstandenen Ionen können wegen der häufigen Zusammenstöße mit den Gaspartikeln in Bruchteilen von Millisekunden leicht auf Moleküle niedrigerer Bildungsenergie umladen. Die Beweglichkeit dieser energetisch stabileren Ionen wird durch das angelegte elektrische Feld nicht beeinflußt.

Herrn Dr. TAUBERT und Herrn Dr. FUCHS danken wir für die im Laboratorium für Massenspektrometrie ausgeführten Gasanalysen.

Der Stromanstieg einer Townsend-Entladung unter dem Einfluß der Raumladung

Von W. KÖHRMANN

Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg
(Z. Naturforsch. **19 a**, 245—253 [1964]; eingegangen am 16. Oktober 1963)

Ausgehend von den Grundgleichungen (TOWNSENDsche Differential-Gleichungen, Nachlieferungs- und POISSON-Gleichung) wird ein Gleichungssystem entwickelt, aus dem die Ortskoordinate x eliminiert ist, und das die gesuchten Ströme $J_+(t)$ und $J_-(t)$ über die Variable t miteinander in Verbindung bringt. Nach Umformen dieses Gleichungssystems können die für Differentialgleichungen üblichen Lösungsverfahren benutzt werden. Gegenüber einer früheren Ausrechnung des Verfassers¹ kann das Verfahren für eine Vielzahl von Anfangsbedingungen (Lichtblitz, konstante Einstrahlung, schwache Einstrahlung, statischer Durchbruch, Über- oder Unterspannung) benutzt werden. Die Behandlung von Beispielen gibt eine Übersicht über die diversen Möglichkeiten und zeigt die Brauchbarkeit des Verfahrens. Interessant ist der Übergang von Stromanstiegen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen in einen einheitlichen Verlauf (asymptotische Form); dieser Übergang ist theoretisch zu erwarten und wird durch Experimente belegt.

Bei experimentellen Untersuchungen des zeitlichen Stromanstiegs einer TOWNSEND-Entladung^{2—5} war festgestellt worden, daß sich mit Erreichen einer gewissen Stromstärke ein charakteristischer Anstieg einstellt. Dabei zeigen sich zunächst nur geringe Abweichungen vom normalen Verlauf; mit wachsender Stromstärke wird dann der Anstieg zunehmend steiler. Als Ursache für diesen charakteristischen Anstieg ergab sich das durch Raumladung der positiven Ionen verzerrte Feld, in dem die Elektronenlawinen eine erhöhte Gasverstärkung erlangen. Eines dieser experimentellen Beispiele⁴ war schon früher theoretisch behandelt worden, indem aus den Grundgleichungen (TOWNSENDsche Differentialgleichungen, POISSON-Gleichung) eine Differentialgleichung für

den Stromanstieg aufgestellt wurde¹. In der Zwischenzeit wurden in⁶ ebenfalls gemessene Stromanstiege unter Berücksichtigung der Raumladung theoretisch behandelt. In⁷ wurde die Ionenabwanderung bei der Berechnung des Stromanstieges berücksichtigt; dies ermöglichte eine durchgehende Beschreibung des Stromanstieges vom Start der auslösenden Elektronen bis zum steilen, zum Durchbruch führenden Anstieg.

In der vorliegenden Arbeit wird ein allgemeines Gleichungssystem für den Stromanstieg hergeleitet; es läßt sich für eine Vielzahl von Entladungsbedingungen benutzen, wie die hier angeführten Beispiele zeigen.

¹ W. KÖHRMANN, Z. Angew. Phys. **11**, 414 [1959].

² H. W. BANDEL, Phys. Rev. **95**, 1117 [1954].

³ R. KLUCKOW, Z. Phys. **148**, 564 [1957].

⁴ H. MIELKE, Z. Angew. Phys. **11**, 409 [1959].

⁵ H. HÖGER, Dielectrics **1**, 94 [1963].

⁶ J. PFAUE, Z. Angew. Phys. **16**, 15 [1963].

⁷ H. SCHLUMBOHM, Dissertation, Hamburg 1961.



1. Gleichungen für den Stromanstieg

Die Herleitung der Grundgleichungen wird unter Anwendung von folgenden Vereinfachungen vorgenommen:

1. In dem homogenen Feld einer Plattenfunkstrecke sind Trägerstrom bzw. Trägerdichte in radialer Richtung gleichmäßig über die Entladungsstrecke verteilt. Somit tritt nur x als Ortskoordinate auf.

2. Die an die Entladungsstrecke gelegte Spannung bleibt zeitlich konstant; demnach muß der Spannungsabfall am äußeren Widerstand vernachlässigbar klein sein.

3. Bei Beschränkung auf kleine E/p -Werte (großes $p d$) kann für α/p der Ausdruck

$$\alpha/p = A(E/p - B)^2$$

benutzt werden. Die Feldstärke-Änderungen (herverufen durch die Raumladung der positiven Ionen) sollen gering sein; unter diesen Umständen werden die Driftgeschwindigkeiten v_- der Elektronen und v_+ der Ionen als konstant angenommen. – Als Extremfall (etwa bei dem in Abschnitt 5 diskutierten y_{\max}) können folgende Werte auftreten:

$$E(0)/E(d) \approx 1,15, \quad \alpha(0)/\alpha(d) \approx 3.$$

4. Die zeitliche Änderung von α in einem Intervall der Länge T_- soll gering sein.

5. Als Nachlieferungsmechanismus nehmen wir ausschließlich Photoeffekt an der Kathode an, entsprechend den experimentellen Beispielen. Dabei wird der Koeffizient $\gamma_{ph} = \delta/\alpha$ als konstant angesetzt.

Auf der Basis dieser Vereinfachungen wird im Anhang 1 aus den Grundgleichungen (TOWNSENDsche Differentialgleichungen, Nachlieferungsgleichung) das folgende Gleichungssystem (1), (2), (3) hergeleitet. Es bringt die im Außenkreis fließenden Stromanteile (Stromdichten) der Elektronen $J_-(t)$ und der Ionen $J_+(t)$ in Zusammenhang mit dem die Kathode verlassenden Elektronenstrom $j_-(0, t)$. Eine anschauliche Deutung der Gl. (1), (2), (3) erhält man durch folgendes Modell: Alle Ionen, Elektronen und Photonen werden an der Stelle $x = d - \alpha_0^{-1}$ erzeugt. Die Laufzeit der Elektronenlawinen bis zu diesem Punkt ist (bei unverzögterer Lawinenentwicklung) $T_{ph} = T_- \{1 - (\alpha_0 d)^{-1}\}$. Die Gl. (1) beschreibt die zeitliche Entwicklung von $j_-(0, t)$; dabei ist $j_F(t)$ der durch Fremdeinstrahlung an der Kathode ausgelöste Fremdstrom. In der Gl. (2) wird der Elektronenstrom $J_-(t)$ dargestellt, bei Vernachlässigung der Laufzeit der Elektronen vom Erzeugungsort bis zur Anode. Die Gl. (3) beschreibt die zeitliche Entwicklung des Ionenstromes $J_+(t)$; sie wird gewonnen aus der Ionbewegung (mit der Geschwindigkeit v_+) von der Stelle $x = d - \alpha_0^{-1}$ bis zur Kathode, wofür die Zeit $T_i = T_+ \{1 - (\alpha_0 d)^{-1}\}$ benötigt wird.

$$j_-(0, t) = j_F(t) + \mu_{ph} j_-(0, t - T_{ph}) \exp \left[\int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right], \quad \mu_{ph} = \gamma_{ph} [\exp \alpha_0 d - 1], \quad (1)$$

$$J_-(t) = \frac{\exp \alpha_0 d}{\alpha_0 d} j_-(0, t - T_{ph}) \exp \left[\int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ_+(t)}{dt} = \frac{\exp \alpha_0 d}{T_+} & \left\{ j_-(0, t - T_{ph}) \exp \left[\int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right] \right. \\ & \left. - j_-(0, t - T_i - T_{ph}) \exp \left[\int_0^d \alpha(x, t - T_i - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

In den Gl. (1), (2) und (3) ist $\int_0^d \alpha(x, t) dx$ die unter dem Einfluß der Raumladung modifizierte Gasverstärkung; wir übernehmen hier den schon in¹ benutzten Zusammenhang (4) mit $J_+(t)$ (siehe auch⁸), den man aus der Anwendung der Poisson-Gleichung und des oben angegebenen analytischen

Ausdrucks für α/p erhält [K₊ siehe Gl. (3.1)]:

$$\int_0^d \alpha(x, t) dx - \alpha_0 d = K_+^2 J_+^2(t). \quad (4)$$

Da die Ausrechnung mit den Funktionalgleichungen (1), (2) und (3) einige Schwierigkeiten bereitet, wollen wir im folgenden eine Umformung auf Differentialgleichungen vornehmen. Aus Gründen der Stetigkeit setzen wir voraus, daß $j_F(t)$ nur bei $t = 0$ eine δ -Funktion enthalten möge; daher

⁸ A. v. ENGEL u. M. STEENBECK, Elektrische Gasentladungen, Springer-Verlag, Berlin 1934.

schreiben wir: $j_F(t) = q \delta(t) + j_F^*(t)$. Durch Einsetzen von (2) in (1) und Benutzung von (4) entsteht zunächst ($\varkappa = \ln \mu_{ph}$):

$$\begin{aligned} J_-(t+T_{ph}) &= J_-(t) \exp\{\varkappa + K_+^2 J_+^2(t)\} \\ &\quad + j_F^*(t) \frac{\exp \varkappa_0 d}{\varkappa_0 d} \exp\{K_+^2 J_+^2(t)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Durch lineare Entwicklung des Gliedes $J_-(t+T_{ph})$ und der rechts bei $J_-(t)$ stehenden Exponentialfunktion erhält man die Gl. (6). Der bei $j_F^*(t)$ stehende Faktor $\exp\{K_+^2 J_+^2(t)\}$ darf gleich 1 gesetzt werden, da der Term $j_F^*(t)$ nur im Anfangsstadium eine Rolle spielt, in dem sich noch keine nennenswerte Raumladung gebildet hat. — Die Gl. (7) entsteht durch Einführung von (2) in (3).

$$\frac{dJ_-(t)}{dt} = T_{ph}^{-1} J_-(t) \{\varkappa + K_+^2 J_+^2(t)\} + j_F^*(t) \frac{\exp \varkappa_0 d}{T_{ph} \varkappa_0 d}, \quad (6)$$

$$\frac{dJ_+(t)}{dt} = \frac{\varkappa_0 d}{T_+} \{J_-(t) - J_-(t-T_i)\}, \quad (7)$$

$$J_-(T_{ph}) = \frac{\exp \varkappa_0 d}{T_{ph} \varkappa_0 d} q, \quad J_+(T_{ph}) = 0. \quad (8)$$

Die Anfangsbedingung (8) für $J_+(t)$ erhält man aus dem oben geschilderten Modell, das die Ionenherzeugung bei $t=T_{ph}$ einsetzen lässt. Die Anfangsbedingung für $J_-(t)$ gewinnt man aus der Forderung, daß $j_-(0, t)$ für $t \rightarrow 0$ in den raumladungsfreien Verlauf [siehe Gl. (2.2)] übergeht.

Wir haben damit ein System von Differentialgleichungen für die beiden interessierenden Funktionen $J_-(t)$ und $J_+(t)$ gewonnen. Eine Abweichung von der üblichen Form einer Differentialgleichung entsteht durch den retardierten Term $J_-(t-T_i)$ in Gl. (7). — Mit (6) und (7) werden die in Abschnitt 3 gebrachten theoretischen Kurven unter Benutzung des im Anhang 3 beschriebenen Verfahrens berechnet. Bei bestimmten Voraussetzungen ergeben sich einfache Lösungen, wie im folgenden Abschnitt 2 gezeigt wird.

2. Asymptotische Lösungen

Es soll gezeigt werden, daß alle zum Durchbruch führenden Stromanstiege mit wachsender Stromstärke in einen einheitlichen Verlauf übergehen. Dieser Verlauf ist unabhängig von speziellen Bedingungen wie Einstrahlung und Überspannung.

Wir gehen aus von dem Gleichungssystem (6), (7) und setzen zunächst $\varkappa \geq 0$ voraus. Es zeigt sich,

dass im Laufe der Entladungsentwicklung der Elektronenstrom $J_-(t)$ so groß wird, daß die Ungleichung

$$J_-(t) \gg J_-(t-T_i) \quad (9)$$

erfüllt ist. Dadurch entsteht aus Gl. (7):

$$\frac{dJ_+(t)}{dt} = (\varkappa_0 d/T_+) J_-(t). \quad (10)$$

Sieht man von einem extrem ungünstigen Verlauf von $j_F^*(t)$ ab, so darf zu diesem Zeitpunkt der Term mit $j_F^*(t)$ in Gl. (6) vernachlässigt werden. Dann entsteht durch Einführung von (10) in (6) die Differentialgleichung 2. Ordnung für $J_+(t)$:

$$\frac{d^2J_+(t)}{dt^2} = T_{ph}^{-1} \frac{dJ_+(t)}{dt} \{\varkappa + K_+^2 J_+^2(t)\}. \quad (11)$$

In normierter Schreibung (vgl. Anhang 3) lautet sie

$$\ddot{y}(\tau) = \dot{y}(\tau) \{\varkappa + y^2(\tau)\}. \quad (12)$$

Durch Integration über τ gewinnt man aus (12) eine Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau) - \{\varkappa y(\tau) + \frac{1}{3} y^3(\tau)\} \\ = \dot{y}(\tau_1) - \{\varkappa y(\tau_1) + \frac{1}{3} y^3(\tau_1)\} = a. \end{aligned} \quad (13)$$

Wie nun die Gl. (13) unmittelbar zeigt, tritt mit wachsendem y an einer Stelle $\tau = \tau_2$ der Fall ein, daß die Glieder $\dot{y}(\tau_2)$ bzw. $\{\varkappa y(\tau_2) + \frac{1}{3} y^3(\tau_2)\}$ groß sind gegen a . Wir können demnach für $\tau > \tau_2$ die linke Seite von (13) gleich Null setzen. Die vorstehend geschilderte Entwicklung tritt für $\varkappa \geq 0$ immer ein; für $\varkappa < 0$ ist es in gewissen Fällen möglich, daß die dafür erforderlichen Bedingungen erfüllt sind. Dann gelten die folgenden Betrachtungen sinngemäß. — Die Lösungen der Gl. (13) (linke Seite gleich Null gesetzt) mit der Anfangsbedingung $y(\tau_2) = b$ sind:

$$y = b(3\varkappa)^{1/2} \{(3\varkappa + b^2) \exp[2\varkappa(\tau_2 - \tau)] - b^2\}^{-1/2} \\ = (3\varkappa)^{1/2} \{\exp[2\varkappa(\tau_\infty - \tau)] - 1\}^{-1/2}, \quad (\varkappa \neq 0), \quad (14)$$

$$y = b \{1 - \frac{2}{3} b^2(\tau - \tau_2)\}^{-1/2} \\ = (\frac{3}{2})^{1/2} \{\tau_\infty - \tau\}^{-1/2}, \quad (\varkappa = 0). \quad (15)$$

Die linke Seite der Gln. (14) und (15) zeigt unmittelbar, daß $y(\tau)$ für einen gewissen Wert τ_∞ singulär wird. Auf der rechten Seite sind die Gleichungen dann auf $\tau_\infty - \tau$ als Argument umgeschrieben.

Weiter soll das Verhalten der durch (14) gegebenen Funktionen für wachsendes y diskutiert werden. Die analytische Entwicklung der Exponentialfunktion in (14) zeigt, daß bei $\tau_\infty - \tau \rightarrow 0$ (d. h.

für $y \rightarrow \infty$) sich alle Funktionen mit $z \neq 0$ asymptotisch der durch (15) gegebenen Funktion ($z = 0$) nähern. Dieses Verhalten läßt sich auch an Hand der Differentialgleichung (12) erklären: der Faktor $z + y^2$ zeigt daß mit wachsendem y der Einfluß von z auf den Funktionsverlauf geringer wird.

In den vorangehenden Gleichungen wurde jeweils nur der Ionenanteil des Stromes betrachtet. Den Elektronenanteil gewinnt man aus

$$\dot{y}_a(\tau) \equiv z_a(\tau) = K_- J_-(t);$$

es ist verständlich, daß der Differentialquotient $\dot{y}_a(\tau)$ das gleiche asymptotische Verhalten wie $y_a(\tau)$ hat. Somit gelten diese Betrachtungen nicht nur für den Ionenanteil, sondern auch für den Elektronenanteil und damit für den Gesamtstrom.

Es ist nun interessant, dieses asymptotische Verhalten an einem experimentellen Beispiel zu studieren. Bei kontinuierlicher UV-Bestrahlung der Kathode wurde eine Schar von Stromanstiegen gemessen², wobei die Überspannung (d. h. $z = \ln \mu_{ph}$) als Parameter variiert wurde. Gegenüber der Original-Auftragung, bei der als Nullpunkt der Zeitachse das Anlegen der Spannung gewählt wurde, sind in Abb. 1 die Einzelkurven in zeitlicher Richtung verschoben worden. Es entsteht dadurch eine Schar von sich nähernden Kurven, die bei großen Stromstärken zusammenlaufen. In Abb. 1 ist außerdem der berechnete Stromverlauf in der asymptotischen Form

$$I(t) = F \{ K_+^{-1} y_a(\tau) + K_-^{-1} z_a(\tau) \}, \quad (16)$$

$$y_a(\tau) = (\frac{3}{2})^{1/2} \{ \tau_\infty - \tau \}^{-1/2}, \quad z_a(\tau) = (\frac{3}{8})^{1/2} \{ \tau_\infty - \tau \}^{-3/2},$$

(F = Querschnitt der Entladung), gestrichelt eingezeichnet; diese Kurve verläuft in der letzten Phase mit den gemessenen Stromverläufen zusammen.

Eine weitere Anwendung der asymptotischen Lösung zur Beschreibung des Stromanstieges findet sich in⁶; dort wird gezeigt, daß die anfänglich statistisch schwankenden Stromanstiege unter dem Einfluß der Raumladung in einen einheitlichen Verlauf übergehen.

3. Experimentelle Beispiele

a) Messungen mit δ -förmiger Einstrahlung

Als Beispiel betrachten wir einen in Wasserstoff gemessenen Stromanstieg⁹. Im Gegensatz zu dem in⁷ behandelten Beispiel mit $\mu_{ph} \approx 1$ ist hier μ_{ph}

⁹ R. KLUCKOW, Z. Phys. **161**, 353 [1961].

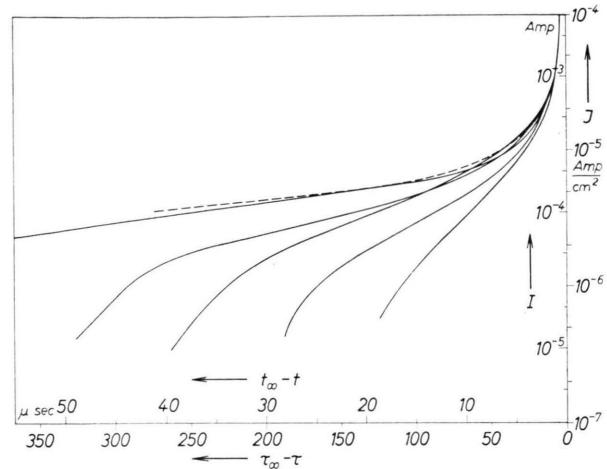


Abb. 1. Experimenteller Nachweis des asymptotischen Verhaltens. Messungen in trockener Luft² (Abb. 2), Daten der Messung siehe Abb. 4. Durch Verschieben der Zeitskala wurden die Meßkurven (—) im letzten Abschnitt zur Deckung gebracht. —— Berechneter Strom in der asymptotischen Form gemäß Gl. (16).

wesentlich von 1 verschieden. — Die Berechnung des Stromanstieges für diese Bedingungen ist ein interessantes Beispiel für das Wirken der Raumladung. An den in Abb. 2 zusammengestellten Kurven läßt sich das Zusammenspiel von $J_+(t)$ und $J_-(t)$ gemäß den Gln. (6) und (7) studieren. So fällt zunächst der Elektronenstrom $J_-(t)$ (wegen $z < 0$) und entsprechend hat $J_+(t)$ einen gekrümmten Verlauf mit negativem 2. Differentialquotienten. Bei $t = T_i$ macht sich die einsetzende Ionenabwanderung als Knick bemerkbar. Um den Stromanstieg zum Durchschlag zu führen, muß der Faktor

$$\ln \mu_{ph} + K_+^2 J_+^2(t) = z + y^2(\tau) \quad (17)$$

in Gl. (6) positiv werden (siehe auch rechte Skala in Abb. 2). Dies tritt bei den Kurven a und b ein, nicht dagegen bei der Kurve c, die daher nicht zum Durchschlag führt. — Auf die Bedeutung des Faktors (17) für das Zustandekommen des Durchschlags wurde schon in⁹ hingewiesen.

Setzt man die Anteile $I_+(t)$ und $I_-(t)$ zum Gesamtstrom zusammen, so ergibt sich ein relativ glatter Verlauf, der nicht mehr die eben geschilderten Details erkennen läßt. Die Kurven a und b in Abb. 3 geben qualitativ den gemessenen Verlauf wieder (vgl. Abb. 9 bis 12 in⁹). Auf einen direkten Vergleich von gemessenem und berechnetem Stromverlauf wird verzichtet wegen der Schwierigkeit in der Wahl der richtigen Parameter N und z . Außerdem wird in diesem Falle mit $y_{max} \approx 1$ der allgemeine

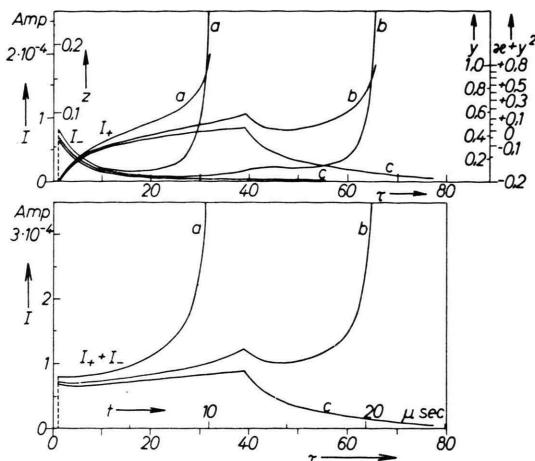


Abb. 2 (oben) und 3 (unten). Berechneter Strom im Wasserstoff ($p=330$ Torr, $d=2,5$ cm, $z=-0,2$). Auslösung der Primärelektronen durch Lichtblitz: $j_F(t)=N q_e \delta(t)$, a: $N=6,5 \cdot 10^5$, b: $N=5,8 \cdot 10^5$, c: $N=5,5 \cdot 10^5$.

Gültigkeitsbereich unserer Lösungen überschritten, so daß die in Abb. 3 gezeigten Kurven in ihrem letzten Stück nur qualitativen Charakter haben.

b) Messungen mit konstanter Einstrahlung

Wir betrachten einen in trockener Luft gemessenen Stromanstieg². An der Kathode wurden durch Bestrahlen mit einer UV-Lichtquelle n_0 Elektronen pro sec ausgelöst; demnach ist $j_F(t) = j_0 = (n_0 q_e)/F$. Der Zeitnullpunkt in den Oszillogrammen ist durch das Anschalten der Spannung gegeben. Es wurden Stromansteige mit verschiedener Überspannung aufgenommen (vgl. Abb. 1). Als Beispiel betrachten wir den nach $35 \mu\text{sec}$ zum Durchbruch führenden Stromanstieg. In der halblogarithmischen Auftragung (Abb. 4) steigt der gemessene Strom bis etwa T_+ steil an und geht dann in einen flachen Teil über; daraus entwickelt sich dann der immer steiler werdende, zum Durchbruch führende Anstieg des Stromes.

Bei der folgenden Auswertung wird ein gegenüber $T_0 = T_- \{1 - (z_0 d)^{-1}\}$ vergrößerter Generationsabstand benutzt. Dies war erforderlich, da frühere Untersuchungen in trockener Luft^{4, 10} eine verzögerte Lawinenentwicklung gezeigt hatten. Der hier benutzte Wert $T_{ph} = 1,5 \cdot 10^{-7}$ sec folgt aus Aufbauzeit-Messungen¹¹.

¹⁰ L. FROMMHOLD, Z. Phys. **160**, 554 [1960].

¹¹ W. KÖHRMANN, Z. Angew. Phys. **7**, 187 [1955]; Ann. Phys., Lpz. **18**, 379 [1956].

Zunächst wird der Stromverlauf \tilde{I}_+ , \tilde{I}_- und $\tilde{I}_+ + \tilde{I}_-$ ohne Berücksichtigung von Raumladungswirkung gemäß den in Anhang 2 gegebenen Formeln berechnet. Dabei setzen wir $z = \ln \mu_{ph} = 0,009$, womit sich die günstigste Anpassung an den anfänglichen (raumladungsfreien) Verlauf der Meßkurve ergibt. Sodann wird eine vollständige Berechnung des Stromverlaufes mittels der Gln. (6) und (7) nach dem in Anhang 3 geschilderten numerischen Verfahren ausgeführt. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Abb. 4 aufgetragen und werden dort mit dem experimentellen Verlauf verglichen. Die gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung zeigt, daß als Sekundäreffekt allein photoelektrische Auslösung an der Kathode in Frage kommt und nicht anteilige Nachlieferung mit γ -Effekt, wie dies von anderer Seite zur Erklärung des Stromanstiegs angenommen wurde¹².

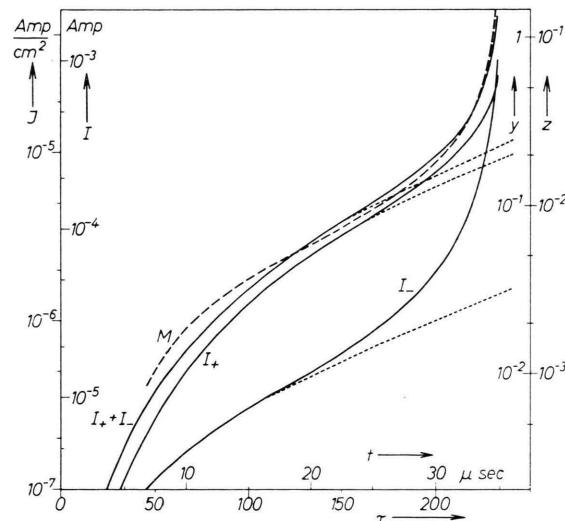


Abb. 4. Stromanstieg in trockener Luft² ($p=724$ Torr, $d=1$ cm, $U \approx 28,6$ kV, $n_0=60$ Elektronen/ μsec , $T_i=15 \mu\text{sec}$), M=Meßkurve, — berechneter Stromverlauf (---- ohne Raumladung).

c) Messungen mit schwacher Einstrahlung

Bei diesen Untersuchungen³⁻⁵ wird bei der statischen Durchbruchsspannung ($\mu_{ph}=1$) die Kathode der Entladungsstrecke mit einer stark reduzierten UV-Lichtquelle bestrahlt, so daß nur einzelne Photoelektronen mit großem zeitlichen Abstand (10⁻³ bis

¹² Y. MIYOSHI, Phys. Rev. **117**, 355 [1960]. — A. L. WARD, Proc. V. Intern. Conf. Ionization Phenomena in Gases, München 1961, Vol. II, p. 1595.

1 sec) ausgelöst werden. Der Durchschlag wird durch eine (unendlich lange) Lawinenkette erzeugt, die in der k -ten Generation $2k - 1$ Elektronenlawinen enthält¹³. Demnach können wir die Ausrechnung mittels der Gln. (6) und (7) vornehmen, indem wir setzen:

$$j_F(t) = j_0 = 2 q_e / (T_{ph} F).$$

In den meisten Fällen ist jedoch eine einfache Berechnung möglich. So wurde in¹ der Stromanstieg bei Vernachlässigung der Ionenabwanderung [d. h. des Termes $J_-(t - T_i)$ in Gl. (7)] berechnet. In⁵ wurde gezeigt, daß die asymptotische Lösung (16) zur Auswertung von Stromanstiegen, ausgelöst durch schwache Einstrahlung, brauchbar ist.

4. Die Berechnung der Aufbauzeit beim Townsend-Aufbau

Die Messung der Aufbauzeit geschieht in der Weise, daß an die Entladungsstrecke ein Spannungs-impuls gelegt wird und mit einem Oszillographen die Zeitspanne vom Anlegen der Spannung bis zum Zusammenbruch gemessen wird (vgl. 11, 14). Für die Analyse der Messungen ist eine Berechnung der Aufbauzeit erforderlich. Diese läßt sich in der Weise durchführen, daß der Stromanstieg vom Einschalten der Spannung über den raumladungsfreien bzw. raumladungsbeeinflußten Bereich des Anstiegs bis zur Spannungsabsenkung ausgerechnet wird. Bei den folgenden Betrachtungen beschränken wir uns auf Nachlieferung durch γ_{ph} -Effekt.

Zunächst betrachten wir den Stromverlauf im raumladungsfreien Teil des Anstiegs. Die hierfür im Anhang 2 angegebenen Formeln werden dadurch vereinfacht, daß mit Überspannung ($\alpha > 0$) gearbeitet wird. Dadurch entfallen (von extrem kleinen Überspannungen abgesehen) in den Gln. (2.5) bzw. (2.7) für $J_+(t)$ alle Glieder mit Ausnahme des Exponentialterms. Wir haben nun mit Gl. (14) schon einen Stromverlauf $y(\tau) = K_+ J_+(\tau)$ beschrieben, der im raumladungsfreien Teil exponentiell ansteigt:

$$\tilde{y}(\tau) = (3\alpha)^{1/2} \exp\{\alpha(\tau - \tau_\infty)\}. \quad (18)$$

Wir können daher die Gl. (14) benutzen, um den Stromverlauf im Raumladungsbereich zu beschreiben. In Abb. 5 ist ein Beispiel für die Entwicklung des Stromes vom Einschalten der Spannung bis zum Zusammenbruch dargestellt. Die Entladung wird zur

Zeit $t = 0$ durch 10^2 an der Kathode ausgelöste Elektronen gestartet. Der größte Teil des Stromanstieges läuft ohne Raumladungseinfluß ab. Nur im letzten Abschnitt wird die Raumladung wirksam; dieser Teil des Stromverlaufes ist mit gedehntem Zeitmaßstab aufgezeichnet.

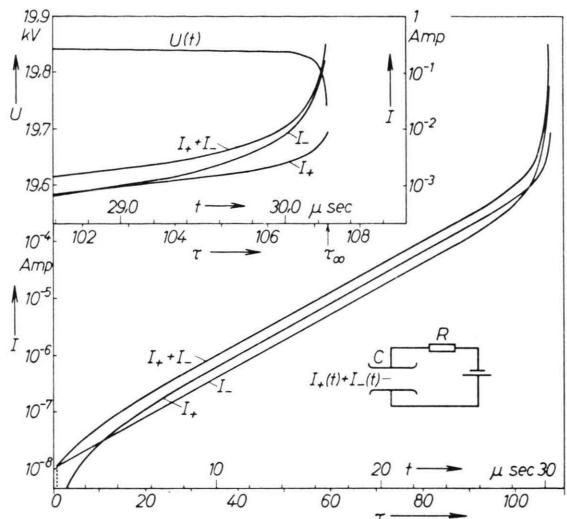


Abb. 5. Zur Berechnung von Aufbauzeiten. Berechneter Strom- und Spannungsverlauf in Wasserstoff ($p=500$ Torr, $d=2$ cm, $U_D=19,8$ kV), $\Delta U/U_D=0,2\%$, $\alpha=\ln \mu_{ph}=0,105$. Ersatzschaltbild für den äußeren Stromkreis der Entladungsstrecke: $R=485 \Omega$, $C=28 \text{ pF}$.

Aus dem Verlauf des Gesamtstromes $J_+(t) + J_-(t)$ ergibt sich der Spannungsverlauf an der Entladungsstrecke C, wenn man das angegebene Ersatzschaltbild zugrunde legt. Umgekehrt bleibt der Einfluß der Spannungsabsenkung auf den Stromverlauf unberücksichtigt. Grundsätzlich wird dabei der Gültigkeitsbereich unserer analytischen Lösung $y = K_+ J_+$ überschritten, so daß der angegebene Stromverlauf im letzten Abschnitt nur qualitativen Charakter hat. Vergleicht man jedoch die Zeitabschnitte für den raumladungsfreien und den raumladungsbedingten Teil des Anstiegs, so sieht man, daß ein Fehler im letzten Teil des Anstiegs für die Länge der Aufbauzeit ohne Bedeutung ist. — Eine genaue Ausrechnung, die unbeschränkt bis zu höheren Stromstärken gültig ist, und bei der die Spannungsabsenkung berücksichtigt wird, findet sich in einer folgenden Veröffentlichung des Autors¹⁵ (siehe auch Abschnitt 5).

Als Endpunkt der Aufbauzeit T_A setzen wir das durch Gl. (14) definierte τ_∞ an, das sich kaum von

¹³ W. LEGLER, Z. Phys. **140**, 221 [1955].

¹⁴ H. DEHNE, W. KÖHRMANN u. H. LENNÉ, Dielectrics **1**, 129 [1963].

¹⁵ W. KÖHRMANN, Z. Naturforsch. **19a**, [1964], im Druck.

dem Zeitpunkt unterscheidet, an dem die erste merkliche Spannungsabsenkung zu beobachten ist. Aus Gl. (18) ergibt sich (vgl. auch Abb. 8 in ¹⁴):

$$\tilde{y}(\tau_\infty) = (3\alpha)^{1/2}.$$

Somit braucht nur der Verlauf von $\tilde{y}(\tau) = K_+ \tilde{J}_+(t)$ (Anteil der positiven Ionen) ohne Berücksichtigung der Raumladung berechnet werden. Unter Verwendung von

$$\tilde{J}_+(T_A) = (3\alpha)^{1/2} K_+^{-1} = (3\alpha)^{1/2} \left(\frac{A p d}{12} \right)^{-1/2} \frac{\epsilon_0 p}{T_+} \quad (19)$$

ergibt sich dann die Aufbauzeit T_A . Bisher wurde bei der Berechnung der Aufbauzeit allein der raumladungsfreie Stromanstieg berücksichtigt; durch Vergleich mit experimentellen Aufbauzeiten konnte eine kritische Stromdichte bestimmt werden ¹⁶. In Gegensatz zu diesem empirischen Kriterium basiert die hier abgeleitete Formel (19) auf einer expliziten Ausrechnung des Stromes im Raumladungsbereich.

5. Gültigkeitsbereich

Eine Abschätzung der maximalen Stromdichte, bis zu der das hier gebrachte Verfahren benutzt werden darf, ließe sich mit Hilfe einer kritischen Betrachtung des Rechnungsganges durchführen. Es wären insbesondere die Näherungen zu diskutieren, die bei der Herleitung der Gln. (1), (2) und (3) gemacht wurden ¹⁷. Die Abschätzung der maximalen Stromdichte wird hier jedoch in anderer Weise vorgenommen. Ein mit den Gln. (6) und (7) berechneter Stromverlauf (Methode A) wird mit der Ausrechnung nach einer exakten Methode (N) verglichen. Bei dieser Methode werden für eine Folge von Zeitpunkten t_n die Stromdichten $j_-(x, t_n)$ und $j_+(x, t_n)$ mit Hilfe der TOWNSENDSchen Differentialgleichun-

gen sukzessive berechnet. Dafür werden die Koeffizienten $\alpha(x, t_n)$, $v_-(x, t_n)$ und $v_+(x, t_n)$ benötigt, die Funktionen von $E(x, t_n)$ sind. Die Feldstärke $E(x, t_n)$ wird für jeden Zeitpunkt t_n mittels der POISSON-Gleichung bestimmt ¹⁵.

Die exakte Ausrechnung wird für das in Abb. 4 dargestellte Beispiel vorgenommen. Der Vergleich zeigt folgendes: Der Ionenstrom $J_+(t)$ hat nach beiden Verfahren praktisch den gleichen Verlauf; beim Elektronenstrom $J_-(t)$ ist der nach A berechnete Verlauf J_-^A merklich kleiner als der nach N berechnete Strom J_-^N . Die Ursache hierfür ist in der ungünstigen Näherung zu suchen, die im Anhang 1 [Gl. (2)] für den Elektronenstrom hergeleitet wurde. Folgende Angaben mögen diese Abweichung charakterisieren:

$y = K_+ J_+$	$\int_0^d \alpha dx - \alpha_0 d = y^2$	J_-^N / J_-^A
0,2	0,04	1,06
0,4	0,16	1,3
0,7	0,49	1,5

Das an diesem speziellen Beispiel gewonnene Ergebnis darf ohne weiteres verallgemeinert werden, da nach Abschnitt 2 alle Stromanstiege mit unterschiedlichem Anfangsverlauf bei großen Stromstärken in einen einheitlichen Verlauf übergehen. Der Grad der Abweichung J_-^N / J_-^A ist offenbar durch die Feldverzerrung bestimmt. Als Maß hierfür können wir $y = K_+ J_+$ bzw. $\int_0^d \alpha dx - \alpha_0 d$ benutzen. Läßt man für den Gesamtstrom $J_+ + J_-$ einen Fehler von 20% zu, so ergeben sich für die hier behandelten Beispiele folgende maximalen y -Werte ¹⁸:

Abb.	y_{\max}
1 und 4	0,55
2, 3 und 5	0,65

Anhang 1:

Herleitung der Funktionalgleichungen

Folgende Lösungsansätze befriedigen die TOWNSENDSchen Differentialgleichungen und die zugehörigen Randbedingungen ($v_-, v_+ = \text{const}$):

$$j_-(x, t) = j_-(0, t - x/v_-) \exp \int_0^x \alpha \left(x', t - \frac{x-x'}{v_-} \right) dx', \quad (1.1)$$

¹⁶ R. SCHADE, Z. Phys. **104**, 487 [1937]. — G. A. KACHIKAS u. L. H. FISCHER, Phys. Rev. **88**, 878 [1952]. — J. DUTTON, S. C. HAYDON, F. LL. JONES u. P. M. DAVIDSON, Brit. J. Appl. Phys. **4**, 170 [1953].

¹⁷ Der beim Übergang von der Funktionalgleichung (5) zur Gl. (6) zu erwartende Fehler (durch Abrechnen der Reihenentwicklung) ist nicht vorhanden; es läßt sich nämlich zei-

gen, daß sich die Restglieder der Reihenentwicklungen genau aufheben.

¹⁸ Bei einem in Argon gemessenen Stromanstieg (M. MENES, Phys. Rev. **116**, 481 [1959]) tritt (wegen hoher Überspannung) eine Abweichung vom exponentiellen Anstieg erst bei relativ hohen y -Werten auf. Aus diesem Grund kann die hier entwickelte Methode nicht benutzt werden, um den Stromanstieg theoretisch zu behandeln.

$$j_+(x, t) = \int_x^d j_-(x', t - \frac{x' - x}{v_+}) \alpha(x', t - \frac{x' - x}{v_+}) dx'. \quad (1.2)$$

Wir betrachten zunächst die Nachlieferungsgleichung

$$j_-(0, t) = j_F(t) + \int_0^d j_-(x, t) \delta(x, t) dx = j_F(t) + \gamma_{ph} \int_0^d j_-(x, t) \alpha(x, t) dx. \quad (1.3)$$

Durch Einsetzen von (1.1) entsteht

$$\begin{aligned} j_-(0, t) &= j_F(t) + \gamma_{ph} j_-(0, t - T_{ph}) \left\{ \exp \int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx - 1 \right\} \\ &= j_F(t) + \mu_{ph} j_-(0, t - T_{ph}) \exp \left\{ \int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{mit } T_{ph} = \frac{\int_0^d x/v_- \exp \left\{ \int_0^x \alpha(x', t) dx' \right\} \alpha(x, t) dx}{\int_0^d \exp \left\{ \int_0^x \alpha(x', t) dx' \right\} \alpha(x, t) dx} \approx d/v_- \{1 - (\alpha_0 d)^{-1}\}. \quad (1.4)$$

Bei der Umformung von (1.3) wird angenommen, daß sich $j_-(0, t)$ in einem Intervall der Größenordnungsmäßigen Länge $T_-/\alpha_0 d$ linear verhält und daß die zeitliche Änderung von $\alpha(x, t)$ gering ist (siehe Voraussetzung 4). Alle $\alpha(x, t)$ -Werte werden auf den Zeitpunkt $t - T_{ph}$ bezogen; auf diese Weise wird berücksichtigt, daß die Gasverstärkung der zur Zeit $t - T_{ph}$ gestarteten Lawinen hauptsächlich durch das an der Kathode erhöhte Feld bestimmt ist. Für T_{ph} entsteht in Gl. (1.4) zunächst ein Ausdruck, der $\alpha(x, t)$ enthält; für die hier vorliegenden Feldverhältnisse darf mit dem (zeitlich konstanten) Näherungswert gerechnet werden. Der Übergang zur 2. Zeile von (1) ist mit geringen Vernachlässigungen verbunden.

Eine Beziehung zwischen $J_+(t)$ und $j_-(0, t)$ gewinnt man aus der 2. TOWNSENDschen Differentialgleichung durch Integration über x :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_+(t)}{dt} &= \frac{1}{T_+} \left\{ \int_0^d j_-(x, t) \alpha(x, t) dx - j_+(0, t) \right\} \\ &= \frac{\exp \alpha_0 d}{T_+} \left\{ j_-(0, t - T_{ph}) \exp \left\{ \int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right\} \right. \\ &\quad \left. - j_-(0, t - T_i - T_{ph}) \exp \left\{ \int_0^d \alpha(x, t - T_i - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Umformung in dem linken Term der 1. Zeile erfolgt analog zur Umformung bei Gl. (1). Der Term $j_+(0, t)$ wird gemäß Gl. (1.2) umgeschrieben; er ist mit dem linken Term nur vergleichbar, falls sich $j_-(0, t)$ in dem Zeitraum $t - T_+ \dots t$ wenig geändert hat. Für diesen Fall darf $j_-(0, t)$ als zeitlineare Funktion angesetzt werden; die Integration über x liefert dann den angegebenen Ausdruck.

Für die Darstellung des Elektronenstromes schreiben wir

$$\begin{aligned} J_-(t) &= d^{-1} \int_0^d j_-(0, t - x/v_-) \exp \left\{ \int_0^x \alpha(x', t - T_{ph}) dx' \right\} dx \\ &= (\alpha_0 d)^{-1} j_-(0, t - T_{ph}) \left\{ \exp \left\{ \int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx \right\} - 1 \right\} \\ &= \frac{\exp \alpha_0 d}{\alpha_0 d} j_-(0, t - T_{ph}) \exp \left\{ \int_0^d \alpha(x, t - T_{ph}) dx - \alpha_0 d \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Integration in der 1. Zeile läßt sich erst nach Einfügen des Faktors $\alpha_0^{-1} \cdot \alpha(x, t - T_{ph})$ im Integranden durchführen. Dieser Faktor kann bei starker Raumladungs-Verzerrung erheblich von 1 abweichen; daher ist (2) eine relativ schlechte Näherung. Beim Einfügen von (2) in (3) [vgl. (7)] spielt die Güte der Näherung jedoch keine Rolle. Hier wird nur die abkürzende Schreibweise (2) für einen Ausdruck benutzt, der in Gl. (3) auftritt.

Anhang 2:**Gleichungen für den Stromanstieg bei Vernachlässigung der Raumladung**

Ausgangspunkt ist die Funktionalgleichung (1) mit

$$\int_0^z dx = z_0 d$$

$$\varphi(t) = j_F(t) + \mu_{ph} \varphi(t - T_{ph}) . \quad (2.1)$$

Für $j_F(t) = q \delta(t)$ ist ($\tau = t/T_{ph}$)

$$\varphi(\tau) = q T_{ph}^{-1} \exp z \tau \quad (2.2)$$

eine Lösung der Gl. (2.1) mit Ausnahme des Zeitintervalls $0 < \tau < 1$. Die Lösung (2.2) ist im wesentlichen identisch mit der „asymptotischen Lösung“, die sich bei der exakten Ausrechnung des Stromanstiegs¹⁹ ergeben hat. Insbesondere folgt aus (2.2) ein exponentieller Anstieg mit der Zeitkonstanten

$$\lambda = T_{ph}^{-1} z = T_{ph}^{-1} \{1 - (z_0 d)^{-1}\}^{-1} \ln \mu_{ph} .$$

Für $j_F(t) = j_0$ ($t > 0$) erhalten wir als Lösung von (2.1) (ein Koeffizient $\{\mu_{ph} - 1\}^{-1} \ln \mu_{ph}$ wird näherungsweise durch 1 ersetzt):

$$\varphi(\tau) = j_0 z^{-1} \{\exp z \tau - 1\} . \quad (2.3)$$

Unter Benutzung von (6), (7) und (8) werden folgende Ausdrücke für $\tilde{J}_+(t)$ und $\tilde{J}_-(t)$ berechnet:

	$z \neq 0$	$z = 0$	
$j_F(t) = q \delta(t)$	$\tilde{J}_- = H_1 \exp z(\tau - 1)$	H_1	(2.4)
$(\tau \leq \tau_i + 1)$	$\tilde{J}_+ = \begin{cases} H_2 z^{-1} \{\exp z(\tau - 1) - 1\} \\ H_2 z^{-1} \{1 - \exp(-z \tau_i)\} \exp z(\tau - 1) \end{cases}$	$H_2 \{\tau - 1\}$	
$(\tau \geq \tau_i + 1)$		$H_2 \tau_i$	(2.5)
$j_F(t) = j_0$ ($t > 0$)	$\tilde{J}_- = H_3 z^{-1} \{\exp z(\tau - 1) - 1\}$	$H_3 \{\tau - 1\}$	(2.6)
$(\tau \leq \tau_i + 1)$	$\tilde{J}_+ = \begin{cases} H_4 z^{-1} \{z^{-1} [\exp z(\tau - 1) - 1] - (\tau - 1)\} \\ H_4 z^{-1} \{z^{-1} [1 - \exp(-z \tau_i)] \exp z(\tau - 1) - \tau_i\} \end{cases}$	$H_4 \frac{1}{2} \{\tau - 1\}^2$	
$(\tau \geq \tau_i + 1)$		$H_4 \tau_i (\tau - \frac{1}{2} \tau_i - 1)$	(2.7)
	$H_1 = \frac{q \exp z_0 d}{T_{ph} z_0 d}, \quad H_2 = \frac{q \exp z_0 d}{T_+}, \quad H_3 = \frac{j_0 \exp z_0 d}{z_0 d}, \quad H_4 = \frac{j_0 T_{ph} \exp z_0 d}{T_+}$		

Anhang 3:
Lösungsverfahren

Für die numerische Berechnung ist der Übergang auf normierte Funktionen zweckmäßig. Wir führen ein:

$$\begin{aligned} \tau &= t/T_{ph}, & \tau_i &= T_i/T_{ph}, \\ y(\tau) &= K_+ J_+(\tau), & K_+ &= \left(\frac{A p d}{12} \right)^{1/2} \frac{T_+}{\varepsilon_0 p}, \\ z(\tau) &= K_- J_-(\tau), & K_- &= \left(\frac{A p d}{12} \right)^{1/2} \frac{T_{ph} z_0 d}{\varepsilon_0 p}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ε_0 = Dielektrizitätskonstante.

Dann entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$\dot{z}(\tau) = z(\tau) \{z + y^2(\tau)\} + K_- \frac{\exp z_0 d}{z_0 d} j_F^*(\tau), \quad (3.2)$$

$$\dot{y}(\tau) = z(\tau) - z(\tau - \tau_i). \quad (3.3)$$

Die Anfangsbedingungen sind:

$$z(1) = K_- \frac{\exp z_0 d}{z_0 d} T_{ph}^{-1} q, \quad y(1) = 0. \quad (3.4)$$

Bei der Lösung des Gleichungssystems (3.2), (3.3) wird die Zeitachse τ in Abschnitte der Länge τ_i eingeteilt. Man rechnet dann die Lösungen $y(\tau)$, $z(\tau)$ jeweils in einem Abschnitt aus und setzt für $z(\tau - \tau_i)$ die schon aus dem vorigen Abschnitt bekannte Funktion $z(\tau)$ ein. Auf diese Weise lassen sich die üblichen Verfahren zur Lösung einer Differentialgleichung verwenden. Im allgemeinen ist man bei der Ausrechnung auf numerische Verfahren angewiesen. So werden die in Abschnitt 3 behandelten Beispiele mit der Methode der schrittweisen Approximation von RUNGE-KUTTA (Formeln 2. Ordnung) berechnet. Es erweist sich als günstig, daß bei dieser Methode die Schrittweite $\Delta\tau$ dem Charakter der Lösungen angepaßt werden kann; bei Beginn des Anstieges kann $\Delta\tau$ relativ groß gewählt werden, während für den letzten steilen Anstieg ein kleines $\Delta\tau$ zweckmäßig ist.

Die folgende Tabelle enthält die bei der Berechnung benutzten Werte von F (Querschnitt der Entladung):

Abb.	1, 4	2, 3	5
F [cm ²]	28,6	10,5	100

¹⁹ A. v. ENGEL u. M. STEENBECK, Elektrische Gasentladungen, Springer-Verlag, Berlin 1934. — W. BARTHOLOMEYCYK, Z. Phys. **116**, 235 [1940]. — P. M. DAVIDSON, Phys. Rev. **99**, 1072 [1955]; **103**, 1897 [1956]; **106**, 1897 [1956]. —

Y. MIYOSHI, Phys. Rev. **103**, 1609 [1956]. — P. L. AUER, Phys. Rev. **111**, 671 [1958]. — J. BÜSER, Arch. Elektrot. **46**, 190 [1961].